割引債の単利・複利に関する考察

割引債において、単利回りと複利回りは常にどちらか一方が高いでしょうか。

状況によって、単利回りが低く複利回りが高いケースや単利回りが高く複利回りが低いケースというように変わるでしょうか。

結論と理由（証明）を考えてみましょう。

2025 年 1 月 19 日

藤井

No.

Date

割引債において「単利回り ＞ 複利回り」となることの証明

割引債

償還価格　100　　発行価格　P　$(0<P<100)$

期間　n　$(n>0)$　　単利回り　R　　複利回り　r

$\dfrac{100}{P}=x$　としておく。　　$x\geqq 1$ である。

単利回り　$R=\dfrac{\dfrac{100-P}{n}}{P}=\dfrac{100-P}{nP}=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{100}{P}\right)-\dfrac{1}{n}$

$\therefore\ R=\dfrac{1}{n}x-\dfrac{1}{n}$　　―①

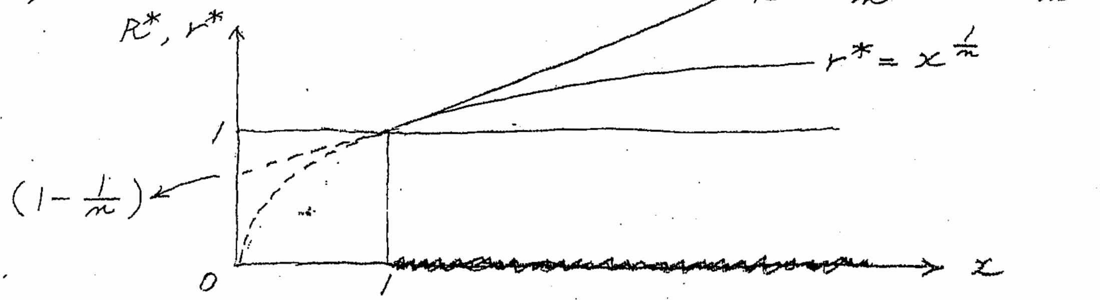
複利回り　$r=\sqrt[n]{\dfrac{100}{P}}-1=\sqrt[n]{x}-1=x^{\frac{1}{n}}-1$　　―②

①，②の数値の大小を比較するのに、それぞれ１を足した数値で比較する。　それぞれ R^*，r^* とする。

$R^*=1+R=\dfrac{1}{n}x+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$　　$(R^*\geqq 1)$

$r^*=1+r=x^{\frac{1}{n}}$　　$(r^*\geqq 1)$

R^*，r^* のグラフを書くと



$x\geqq 1$ の範囲で考えないといけない。

$x=1$ のとき　$R^*=1$，　$r=1$ である。

R^*，r^* が同じ値をもつのは，$x=1$ のときのみ。

$x>1$ のとき，$(R^*$の傾き$)-(r^*$の傾き$)$

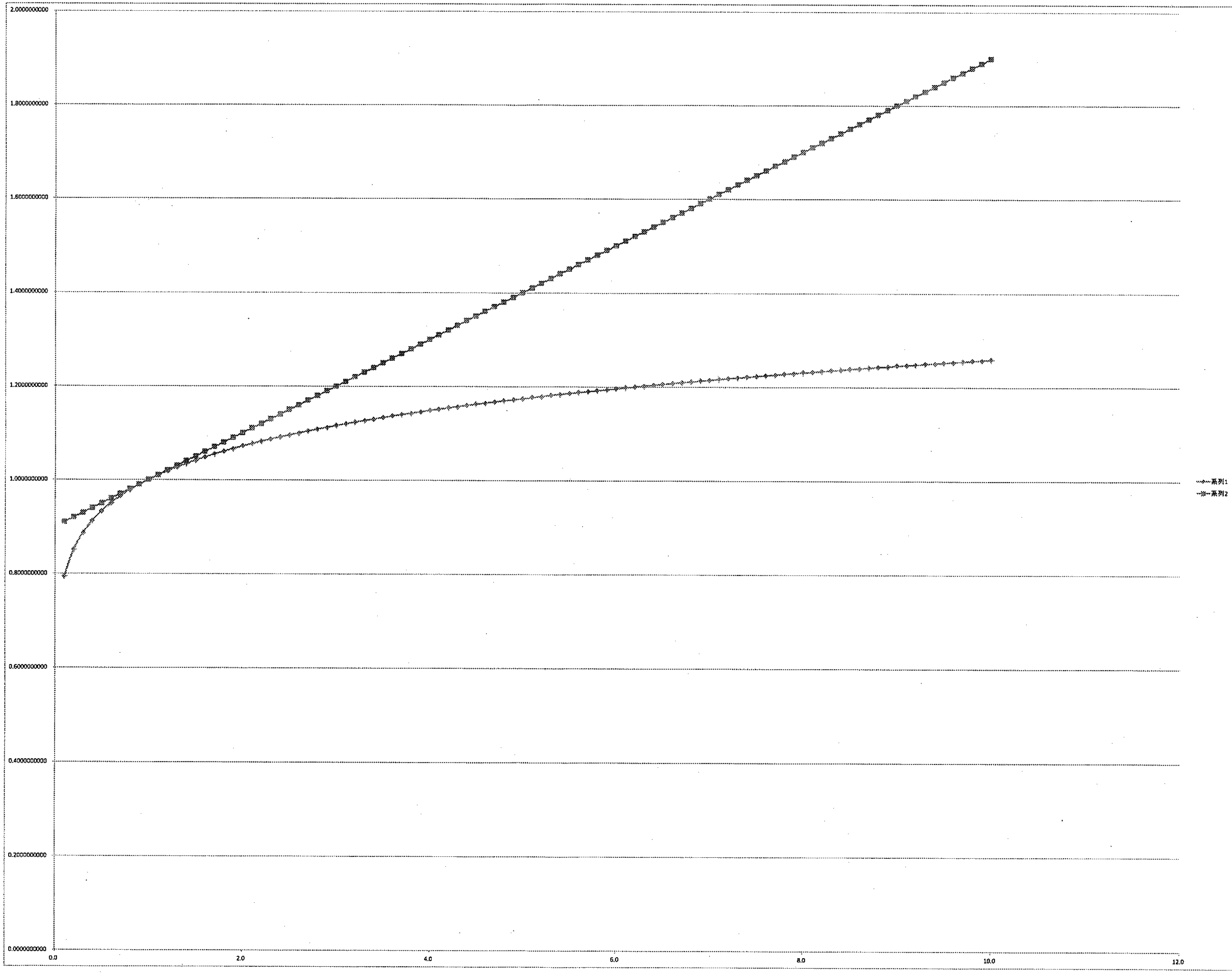
$=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{1-\frac{1}{n}}$

$=\dfrac{1}{n}\left\{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^{1-\frac{1}{n}}\right\}>0$

$\left(0<\dfrac{1}{x}<1,\ 0<1-\dfrac{1}{n}<1\ \text{より}\right)$

n = 10 の場合

時点	複利ベース	単利ベース
0.1	0.7943282347	0.91
0.2	0.8513399225	0.92
0.3	0.8865681506	0.93
0.4	0.9124435366	0.94
0.5	0.9330329915	0.95
0.6	0.9502002165	0.96
0.7	0.9649610951	0.97
0.8	0.9779327685	0.98
0.9	0.9895192582	0.99
1.0	1.0000000000	1.00
1.1	1.0095765828	1.01
1.2	1.0183993761	1.02
1.3	1.0265836313	1.03
1.4	1.0342196941	1.04
1.5	1.0413797440	1.05
1.6	1.0481223895	1.06
1.7	1.0544958919	1.07
1.8	1.0605404816	1.08
1.9	1.0662900585	1.09
2.0	1.0717734625	1.10
2.1	1.0770154403	1.11
2.2	1.0820373898	1.12
2.3	1.0868579429	1.13
2.4	1.0914934256	1.14
2.5	1.0959582264	1.15
2.6	1.1002650931	1.16
2.7	1.1044253752	1.17
2.8	1.1084492226	1.18
2.9	1.1123457499	1.19
3.0	1.1161231740	1.20
3.1	1.1197889288	1.21
3.2	1.1233497625	1.22
3.3	1.1268118200	1.23
3.4	1.1301807132	1.24
3.5	1.1334615817	1.25
3.6	1.1366591441	1.26
3.7	1.1397777440	1.27
3.8	1.1428213880	1.28
3.9	1.1457937810	1.29
4.0	1.1486983550	1.30
4.1	1.1515382962	1.31
4.2	1.1543165677	1.32
4.3	1.1570359301	1.33
4.4	1.1596989599	1.34
4.5	1.1623080652	1.35
4.6	1.1648655007	1.36
4.7	1.1673733802	1.37
4.8	1.1698336881	1.38
4.9	1.1722482903	1.39
5.0	1.1746189431	1.40
5.1	1.1769473018	1.41
5.2	1.1792349285	1.42
5.3	1.1814832989	1.43
5.4	1.1836938085	1.44
5.5	1.1858677786	1.45
5.6	1.1880064614	1.46
5.7	1.1901110445	1.47
5.8	1.1921826559	1.48
5.9	1.1942223675	1.49
6.0	1.1962311989	1.50
6.1	1.1982101206	1.51
6.2	1.2001600576	1.52
6.3	1.2020818917	1.53
6.4	1.2039764646	1.54
6.5	1.2058445800	1.55
6.6	1.2076870059	1.56
6.7	1.2095044771	1.57
6.8	1.2112976963	1.58
6.9	1.2130673370	1.59
7.0	1.2148140440	1.60
7.1	1.2165384361	1.61
7.2	1.2182411066	1.62
7.3	1.2199226253	1.63
7.4	1.2215835392	1.64
7.5	1.2232243742	1.65
7.6	1.2248456361	1.66
7.7	1.2264478113	1.67
7.8	1.2280313680	1.68
7.9	1.2295967572	1.69
8.0	1.2311444133	1.70
8.1	1.2326747553	1.71
8.2	1.2341881869	1.72
8.3	1.2356850980	1.73
8.4	1.2371658646	1.74
8.5	1.2386308500	1.75
8.6	1.2400804051	1.76
8.7	1.2415148690	1.77
8.8	1.2429345697	1.78
8.9	1.2443398243	1.79
9.0	1.2457309396	1.80
9.1	1.2471082127	1.81
9.2	1.2484719311	1.82
9.3	1.2498223735	1.83
9.4	1.2511598097	1.84
9.5	1.2524845015	1.85
9.6	1.2537967025	1.86
9.7	1.2550966588	1.87
9.8	1.2563846091	1.88
9.9	1.2576607851	1.89
10.0	1.2589254118	1.90



＜債券価格と修正デュレーション＞

［問題］

さて、債券価格とデュレーションに関する小問題です。
Ⅰ、Ⅱの問題とも、A については 1分、B については 3分以内で計算して下さい。
（関数電卓は必要ありません。 四則演算+,−,x,÷の計算機で計算可能です。）

Ⅰ．①クーポン C = 3　②期間（年数） n = 30（30年）　③複利回り r = 0.05（5%）　④償還価格 100円
の債券があります。 クーポンは年1回払いです。
ただし、（1.05）の30乗 = 4.32194　として下さい。
A）債券価格は、いくらですか。
B）デュレーションは、いくらですか。

Ⅱ．①クーポン C = 5　②期間（年数） n = 30（30年）　③複利回り r = 0.03（3%）　④償還価格 100円
の債券があります。 クーポンは年1回払いです。
ただし、（1.03）の30乗 = 2.42726　として下さい。
A）債券価格は、いくらですか。
B）デュレーションは、いくらですか。

［解答］

下記の（ア）式、および（イ）式 に数値を代入し計算します。
30乗の数値は問題文にありますし、31乗の数値は30乗の数値に1回同じ数値を掛ければよいので、関数電卓は必要ありません。
四則演算+,−,x,÷の計算機で計算可能です。

Ⅰ	A)	69.26
	B)	17.14
Ⅱ	A)	139.20
	B)	17.72

＊ B)は、修正デュレーションの数値です。
今回の問題では、ⅠとⅡとも修正デュレーションに大きな差はありません。

ちなみに、上記問題の状況で、単利回りを計算してみましょう。

Ⅰ　　単利回り$_{\mathrm{I}}$ ＝ 0．0581（5．81％）

Ⅱ　　単利回り$_{\mathrm{II}}$ ＝ 0．0265325（2．65325％）

このように、Ⅰのケースでは、 単利 ＞ 複利

Ⅱのケースでは、 単利 ＜ 複利

となっています。

cf.　ディープ・ディスカウント債は、

Ⅰのケースのように　単利のほうが複利より大きくなっています。

[1] 債券価格の式

債券価格は以下の式で表現できます。

上式は、初項　C／(1+r)　　公比　1／(1+r)　の等比数列の和なので、数列の和の公式を用いて、

$$P = \frac{C}{(1+r)} * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{1 - \frac{1}{(1+r)}} + \frac{F}{(1+r)^n}$$

債券価格の式は整理すると、次のようになります。

$$P = \underbrace{\frac{C}{r} * \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]}_{\text{[クーポン部分の割引現在価値]}} + \underbrace{\frac{F}{(1+r)^n}}_{\text{[満期日償還部分の割引現在価値]}} \quad \text{[ア]式}$$

[2] デュレーションの式

修正デュレーションの式は、[ア]式を r で微分して、下記の式に代入していきます。

$$D_{mod} = -\left(\frac{1}{P} * \frac{dP}{dr}\right)$$

修正デュレーションの式は整理すると、次のようになります。

$$D_{mod} = \frac{1}{P} * \left[\frac{C}{r^2} * \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] + \frac{n}{(1+r)^{n+1}} * \left(F - \frac{C}{r}\right)\right] \quad \text{[イ]式}$$

ちなみに、マコーレー・デュレーションの式は次のようになります。

$$D_{mod} = \frac{D_{mac}}{(1+r)}$$

＊ 作成： 藤井