

Ⅱ-1. なぜ貧富格差は拡大するか？

「当初平等で格差が少ない状態から貧富格差が拡大する状態に遷移するメカニズム」

～ 金融資産の分布形成シミュレーション ～

2025 年 1 月 19 日

M.Fujii

概要

最初はある程度平等で格差が少ない資産分布状態（ポアソン分布）の国・地域であっても、人々がランダムにゲーム取引すると、指数分布に近づき、貧富格差は増していきます。

富を持たない層が多くなりますが、一方、超富裕層も登場してきます。

金貨といった通貨をランダムに取引したとしても金貨所持枚数等の資産格差を解消することは出来ず、むしろ貧富格差が広がっていくことがシミュレーション結果として出てくるのです。

最初、貧富の差があまり出ていなくとも、のちに超富裕層が現れることがポイントです。

I. はじめに

n 人に対して $\lambda * n$ 枚のコインをランダムに分け与えたとき、所持している金貨枚数の分布は平均 λ のポアソン分布で近似することができます。

その後、人々の間で金貨をランダムにやりとりさせると、金貨所持枚数の分布は指数分布に近づいていくことが分かっています。

当該文書では、ランダムに金貨を分け与えるシミュレーションと、次にそれをランダムに交換させるシミュレーションを行い、当初平等で格差が少ない状態から、貧富の格差が拡大する状態に遷移するメカニズムを探っていくことにしましょう。

Ⅱ. 最初平等で格差が少ない資産分布状態（金貨分配）

杉並国という国があったとしましょう。杉並国の人口は、5,000 人です。

杉並国民の金融資産額の格差はほとんどなく、平等であったとしましょう。

杉並国では、金貨枚数で金融資産額が計測できます。

杉並国政府は杉並国民を豊かにするため、50,000 枚の金貨を分け与えることを決定します。金貨はヘリコプターで杉並国上空からバラ撒きます。

杉並国民全員が 10 枚の金貨を手に入ればこれまた資産格差はありませんが、たまたま 10 枚より多くの金貨を手にする人もいれば、10 枚よりも少ない金貨になる人もいます。

ここで、一人の杉並国民に注目しましょう。杉並国政府が金貨を 1 枚投げた時、この一人の杉並国民が金貨を手にする確率は、 $1/5,000 = 0.0002$ です。

これが 50,000 回（50,000 枚金貨があるので）繰り返されたとすると、この杉並国民が k 個の金貨を手にする確率は、以下のような二項分布になります。

$$P_k = {}_{50,000}C_k * 0.0002^k * (1-0.0002)^{50,000-k}$$

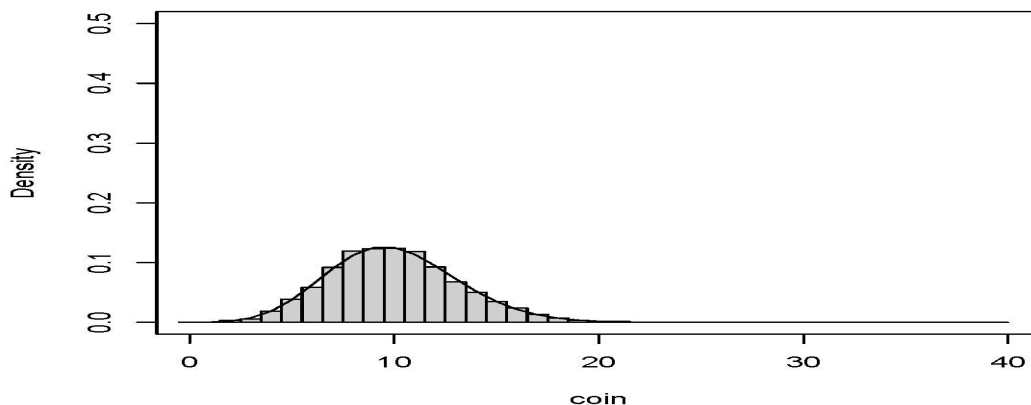
極限（現在 $n = 5,000$; $n \rightarrow \infty$ ）を考えれば、以下のようなポアソン分布（平均、分散が λ という一つのパラメータのみしか持たない分布）になります。

$$P_k = (10^k / k!) * \exp(-10)$$

平均が 10 ですので、パラメータ $\lambda=10$ のポアソン分布となります。

図 1.より、金貨の所持枚数の分布は、ポアソン分布で近似できていると言えます。

図1. 最初ある程度平等で格差が少ない金融資産分布状態（ポアソン分布）



Ⅲ. 貧富格差解消目的で富の再分配（金貨の取引）

杉並国政府はヘリコプターマネーによって、杉並国民に平均 10 枚の金貨を与えることに成功しました。

しかしながら、分散も 10 となったため、貧富格差を解消する意味で、富の再分配をしなければならないと考えました。

そこで、杉並国民同士が出会ったら、ジャンケンして、勝った人に負けた人から金貨を 1 枚移転することを決定しました。ただし、金貨ゼロの人はジャンケンに負けても金貨は払えず、払う必要もありません。

ジャンケンには能力差なく、誰でも勝つ確率と負ける確率が同じで、平等さを目指す取引ゲームとしたら好ましく、貧富の格差解消を図ることが出来ると考えました。

5,000 人の中からランダムに選ばれた 2 人がジャンケンをしていきます。

ジャンケンで負けた人が勝った人に持っている金貨を 1 枚渡すルールです。

このとき、負けた人が 1 枚も金貨を持っていなければ、金貨のやりとりは行われません。

これを 10^5 回繰り返します。

金貨の取引を繰り返しても、金貨総数は変わらないので、平均は変わらず 10 です。

下図 2. および図 3. に描かれているのは平均 $1/10$, すなわち、パラメータ $\lambda=10$ の指数分布の確率密度関数 $f(x) = (1/10) * \exp\{(-1/10)*x\}$ に近づいて行っている途中の金融資産ヒストグラムです。

実際は、統計ソフト R を使ってシミュレーションしているので、その動画を見ると、金貨所持枚数の分布が徐々に指数分布に近づいていっていることがわかります。

貧富の格差は結局のところ、拡大しました。

一人当たりの平均金貨枚数は変わりがなく、ジャンケンという能力差ない取引ゲームで、自由なゲーム取引をさせていっているにもかかわらず、指数分布に近づき、金融資産ゼロの人が一番多いという結果を招いてしまいました。

→ 図2. 及び 図3. のほうが 図1. よりも現在の日本国民の金融資産分布に近いと私には思われます。当初はまとまっていてバラツキが少ない集まりであっても、自由活発な取引（やり取り）が行われる社会状態では、結局のところバラツキは大きくなり、少ないながらも超富裕層の誕生という結果をもたらすのだ、と言えます。

→ 資産格差解消（貧富の解消）が政府の政策として掲げられたとき、一時的にその差は減少し解消に向かうように見えますが、結局またかなりバラけます。

IV. 当初の資産家は怎么样了？（富を持たない層の発生 と超富裕層の登場）

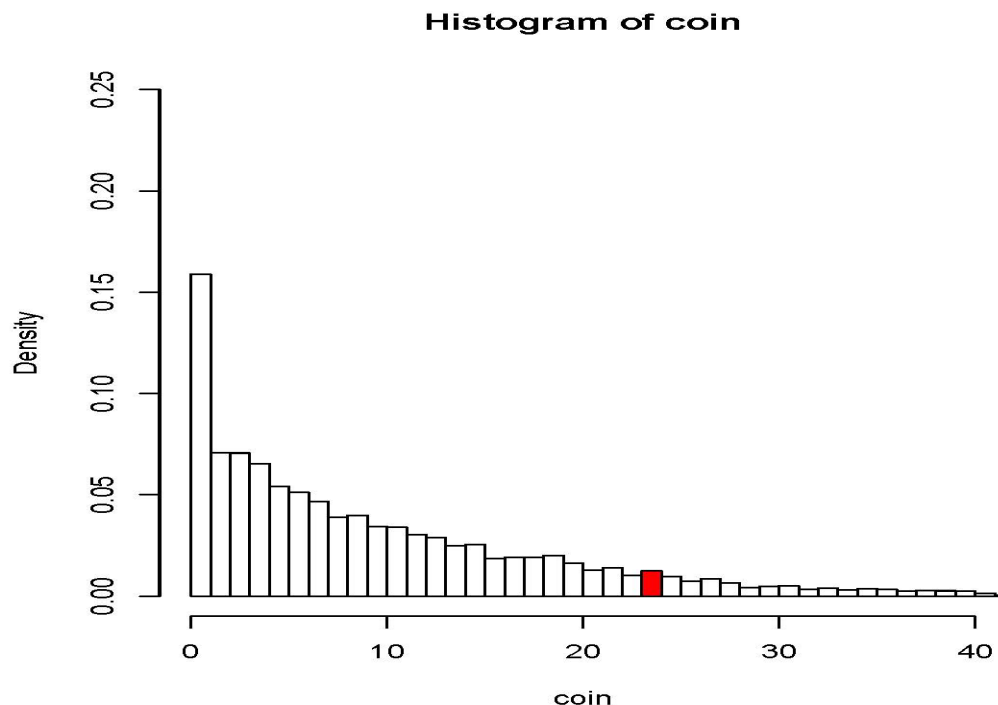
集団の中のある一人が所持している金貨の枚数がどのように変化するかシミュレーションした結果も下図 2. および図 3. に描かれています。

初めに金貨が配られたときに金貨を最も多く持っている人の金貨の枚数がどのように変化するかを表したものです。

もともと初めに最も多く金融資産があった人（赤く色付け）が当該シミュレーションを行なった際、移動した層です。

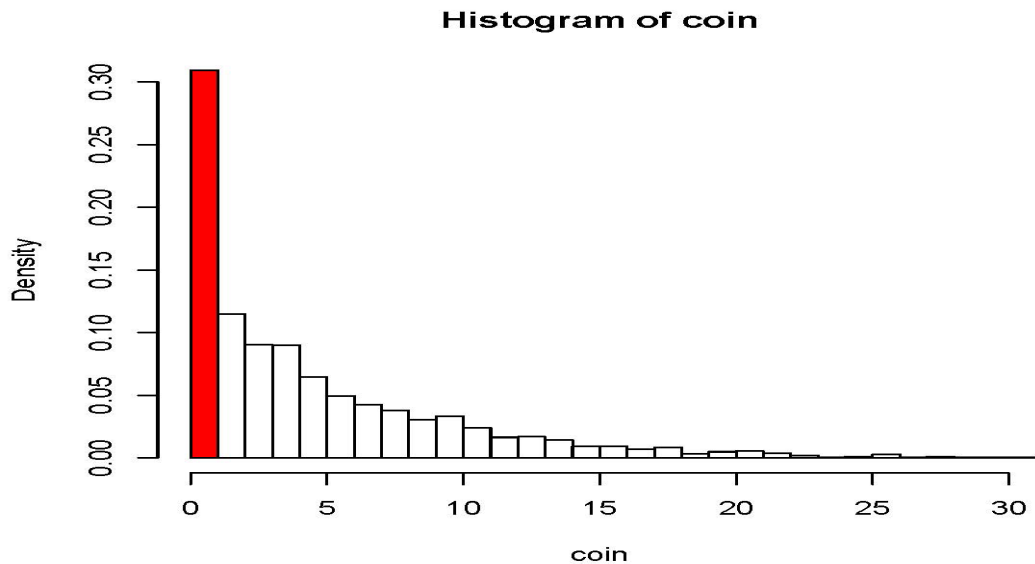
今回はその取引をシミュレーションとして 10^5 回繰り返します。

図2. 人々がランダムにゲーム取引をしたあとの金融資産分布状態（指数分布）
～ シミュレーション結果の一例 A ケース



* 赤くなっている層は、もともと初めに最も多く金融資産があった人が当該シミュレーションを行なった際、移動した層です。一番の資産家も多少金融資産を減らしています。

図3. 人々がランダムにゲーム取引をしたあとの金融資産分布状態（指数分布）
～ シミュレーション結果の一例 B ケース



* 赤くなっている層は、もともと初めに最も多く金融資産があった人が当該シミュレーションを行った際、移動した層です。一番の資産家はほとんどの金融資産を失っています。

V. まとめ

以上のシミュレーションから、まずコインのやりとりを繰り返していくと、徐々にポアソン分布から指数分布へと近づいていくことが分かりました。

最初はポアソン分布でも、ランダムにゲーム取引すると、指数分布に近づき、貧富格差は増してきます。

金貨をランダムに取引したとしても金貨所持枚数の格差をなくすことは出来ず、むしろ貧富格差が広がっていると考えられます。

また、初めの金貨所持枚数が最大の人の動きを見ると、取引の繰り返しの中で枚数が 24 枚もしくは 0 枚のケース例となっていますので、初めの枚数が多いからと言って取引を繰り返したあとでも多くの金貨を持っているとは限らないケースも多数出現することが分かりました。

富を持たない層が多くなりますが、一方、超富裕層も登場してくることがポイントです。

資料集

[統計解析フリーソフト R によるシミュレーションのスク립ト]

```
n <- 5000
cn <- 50000
coin <- numeric (n)
vr <- floor (runif (cn) * n)+1
for (i in 1:cn){
  r0 <- vr [i]
  coin [r0] <- coin [r0]+1
}
```

```
hist (coin, xlim = c (0,40), ylim = c (0,0.5), main="", breaks = seq (-0.5,39.5,by=1),
freq=F)
par (new=T)
x <- 0:40
plot (x, dpois(x,10), xlim = c (0,40), ylim = c (0,0.5), ann = F, type="l")
```

```
N <- 10^5
```

```
vr1 <- floor (runif (N-1) * n)+1
vr2 <- floor (runif (N-1) * n)+1
```

```
for (i in 1:(N-1)) {
+   r1 <- vr1[i]
+   r2 <- vr2[i]
+   if (r1!=r2 && coin [r2] > 0){
+       coin [r1] <- coin [r1]+1
+       coin [r2] <- coin [r2]-1
+       coin [c(-r1,-r2)] <- coin [c(-r1,-r2)]
+   }
```

```

+     marg <- max (abs (coin))
+     s <- seq (0,marg+1,by=1)
+     if (i %%10^3==0){
+         hist (coin, xlim = c(0,40), ylim = c(0,0.25), breaks = s, freq = F)
+         curve (dexp (x,1/5), xlim = c (0,40), ylim = c (0,0.25), add=T)
+     }
+ }

coin <- numeric (n)
vr <- floor (runif (cn) * n)+1
> for (i in 1:cn){
r0 <- vr [i]
coin [r0] <- coin [r0]+1
+ }
coin <- sort (coin,decreasing=T)
N2 <- 10^5
vr1 <- floor (runif (N2-1) * n)+1
vr2 <- floor (runif (N2-1) * n)+1

for (i in 1:(N2-1)) {
+     r1 <- vr1 [i]
+     r2 <- vr2 [i]
+     if (r1!=r2 && coin [r2]>0){
+         coin [r1] <- coin [r1]+1
+         coin [r2] <- coin [r2]-1
+         coin [c(-r1,-r2)] <- coin [c(-r1,-r2)]
+     }
+     marg <- max (abs (coin))
+     s <- seq (0, marg+1, by=1)
+     cc <- ifelse (s <= coin [1] & coin [1]<s+1,"red","white")
+     if (i%%10^4==1) {
+         hist (coin, xlim = c(0,40), ylim = c(0,0.25), breaks = s,freq=F,col=cc)
+     }
+ }
>

```

[参考文献]

1. 石田基弘『Rで楽しむベイズ統計入門』(2018年1月29日 ; 技術評論社)
2. 岩崎学『カウントデータの統計解析』(2010年7月5日 ; 朝倉書店)
3. 岩崎学『確率・統計の基礎』(2007年 ; 東京図書)
4. 奥城健太郎『富の分布のシミュレーション』(2018年1月15日 ; 明治大学)
5. 奥村晴彦『Rで楽しむ統計』(2016年9月15日 ; 共立出版)
6. 浜田宏・石田淳・清水裕士『社会科学のためのベイズ統計モデリング』(2019年12月1日 ; 朝倉書店)
7. 藤井亮輔・鈴木康司『Rでできるビジュアル統計学』(2021年10月8日 ; 金芳堂)
8. 松浦健太郎『StanとRでベイズ統計モデリング』(2016年10月25日 ; 共立出版)
10. 森真・藤田岳彦『確率統計入門-数理ファイナンスへの適用』(講談社)

[追加考察]

本編は、最初はあまり貧富格差がない場合でも、時間が経過し、金融取引が行われることで、貧富格差が拡大し、超富裕層が登場することの底辺にある理屈を探るものでした。

ポアソン分布の平均と分散は同値（必然的に標準偏差は平均より小）ですが、指数分布の分散は平均の2乗になります。平均がポアソン分布と同じであっても、指数分布の分散は大きくなります。ポアソン分布から指数分布に移行することで、貧富の拡大を示しています。

上記とは別に、「富の8割は人口の2割によって支配されるという80:20の法則」で有名な19世紀のイタリアの経済学者 Vilfredo Pareto によって考案されたパレート分布は、所得の分布をモデリングする確率分布です。実際の統計データとの当てはまりも良いと言われています。

指数分布を指数分布で割った“商の確率分布”は、パレート分布になります。パレート分布は変数変換を介して指数分布に結び付きます。「ポアソン分布」-「指数分布」(*)-「ガンマ分布」-「パレート分布」は、結び付いています。

$$(*) \text{Exp}(\lambda) \sim \Gamma(1, \lambda)$$

以上