

Ⅱ-2. 平均待ち時間についての考察ノート

～ 株式相場の急落・ジャンプ等までの待ち時間を
電車、エレベーターの待ち時間から考える ～

2025 年 1 月 19 日

M.Fujii

20世紀を代表するフランスの戯曲『ゴドーを待ちながら』（サミュエル・ベケット）。不条理を描いた作品です。一本の木がある田舎道の夕暮れ、2 人組の男たちが救済者ゴドーを待ちながら暇つぶしに興じています。いくら待ってもゴドーは来ません。神はやって来ないのです。実存についての苦しみ。しかし、二人の男たちは無為に時間を過ごします。

株式相場や為替相場は、突然イベントが起こり、相場が急落したり、その後比較的穏やかな時期を経て、ジャンプやスパイクが起こったりします。投資のリターンを考えると、いずれジャン

プが起こる未来を想定して、どのくらい待てますか。 また、変化検知はどのような方法で行えば良いのでしょうか。

電車の路線のどこかで事故が起きた時、エレベーターを1階エントランスで待っている時、なかなかやって来なくて待たされるのはなぜでしょうか。

長く待たされた時、異常と考えますか。 どのくらい待つと心に決めますか。

電車が等間隔時間の運転となっているのとバラバラな間隔の運転となっているのでは、待ち時間はどう違ってくるのでしょうか？ これについては、待ち行列理論によって、結論が出ています。 等間隔運転は待ち時間を減らします。

＊ 電車やエレベーターの到着を「イベント」発生と考えて、本稿では考察を進めます。

Note

I. 平均待ち時間の考察

1. 等間隔で到着する電車の場合

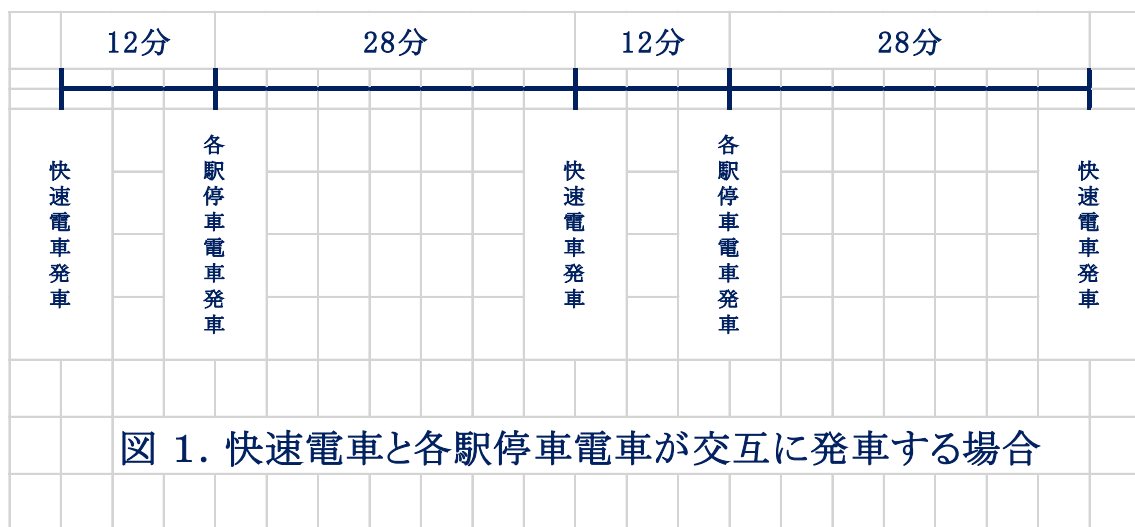
状況 1. 腕時計を忘れました。電車の時刻表を知らずに、駅にやって来ました。電車は一定の間隔、20 分おきにその駅に到着するとします。次の電車に来るまでに平均どのくらい待てば良いでしょうか。

考察 1. 駅に到着する時刻は電車の到着とは無関係に決まるので、到着時刻は到着する電車と次に到着する電車の間で一様分布と考えられます。したがって、待ち時間の分布は区間 $[0, 20)$ 上の一様分布となり、その平均は 10 分です。

2. 快速電車と各駅停車電車が交互に発車する場合

状況 2. 腕時計を忘れました。電車の時刻表を知らずに、駅にやって来ました。快速電車と各駅停車電車が交互に発車します。40 分間に電車が 2 本です。状況 1. と同じく、20 分間に 1 本平均の電車です。ただし、等間隔ではなく、快速電車が発車して 12 分後に各駅停車が発車し、その 28 分後に次の快速電車が発車します。快速電車でも各駅停車電車でも、乗客はどちらか先に発車する電車に乗るものとします。電車の発車時刻とは無関係に駅に到着したとすると、駅に着いてから電車が発車するまでに平均どのくらい待たされるでしょうか。

考察 2. 快速電車と各駅停車電車のどちらに乗る可能性が高いでしょうか。快速電車です。なぜなら、快速電車は 40 分間のうち 28 分間分の駅に到着する乗客を乗せるからです。12 分間しか待たない各駅停車電車では $12 / 40$ の割合の乗客しか捌き切れません。ということで、快速電車のほうが必然的に混みます。これは現実のケースとイメージが合っています。快速電車に乗るときは平均で 14 分待たされます。各駅停車電車に乗るときは平均で 6 分しか待たされません。したがって、待たされる時間の平均は、次のように状況 1. の 10 分より長くなります。



3. ランダムな到着の電車の場合

JR 山手線の電車は混雑時でもランダムな運行とはなっておらず、きちんとした時刻表がありますが、このパラグラフでは ばらついたランダムな運転を行っていると仮定してみましょう。電車の到着間隔は指数分布に従うと仮定しまし

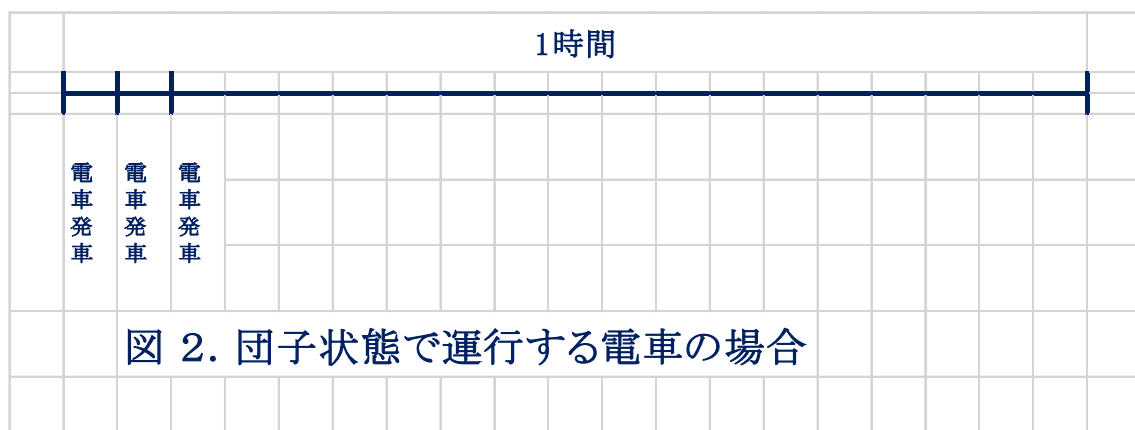
よう。電車の到着間隔が互いに独立で平均 20 分の指数分布に従う場合、電車の到着とは無関係に駅に着いたとすると、待ち時間の平均はどのくらいでしょうか。

考察 3. この場合も平均 20 分の割合で 1 本の電車が来るのですから、待ち時間平均 10 分近辺だと思うのではないのでしょうか。しかし、ランダムな運行の電車です。1 時間に到着するのは平均 3 電車なので、20 分に 1 本平均ですが、団子状態で到着することも考えられます。一昔前のバス運行だとバスが団子状態でバス停に到着することがよくありました。

電車の到着間隔は指数分布ですから、無記憶性の性質から直前の電車がいつ出発したかには無関係で、待ち時間は電車の到着間隔と同じ分布に従います。平均待ち時間は電車の平均到着間隔と同じ 20 分です。等間隔で来る場合の 2 倍も待つことが多いようになります。

4. 団子状態で運行する電車の場合

意地悪な例を作れば、平均待ち時間を大きく出来ます。たとえば団子状態運転をしているときを想定しましょう。1 時間に 3 本の電車（普通に考えれば平均 20 分間に 1 本の電車）を考えますが、毎時 0 分、1 分、2 分の発車となった場合、待ち時間の平均は 30 分近くになります。団子状態運転は等間隔運転に比べ、長い時間待たされるのです。



Ⅱ. 電車の遅れと混雑についての対策の考察

1. 電車の遅れと混雑

東京の山手線や大阪の環状線では、電車が混み出すと、乗客の乗り降りに余計に時間がかかるようになります。すると電車は少し遅れ気味になって、前の電車との間隔が少しだけ長くなります。すると次の駅で乗ってくる乗降客の数がそれだけ多くなり、これがさらなる遅れの原因となります。これを繰り返しているうちに、混雑による遅れは雪だるま式に膨れ上がります。

2. 電車遅れのモデル

この現象をごく簡単なモデルで考えてみましょう。各駅は等間隔に配置されていて、乗降客の到着率や降車割合は皆全て同じとします。平常時には電車は等間隔で運転されているものとしましょう。等間隔運転の場合、スムーズに乗客を捌くことができます。あるとき、何かの原因で1台の電車が遅れ始めたとしてみましょう。この電車の乗客数と遅れ時間がひと駅ごとに変わ

っていく様子を考えます。

いま、注目している電車が n 人の乗客を乗せて前の電車の t 分後にある駅を発車したものとします。この電車が次の駅を発車するときの乗客数 n' と前の電車との間隔 t' を仮定しましょう。

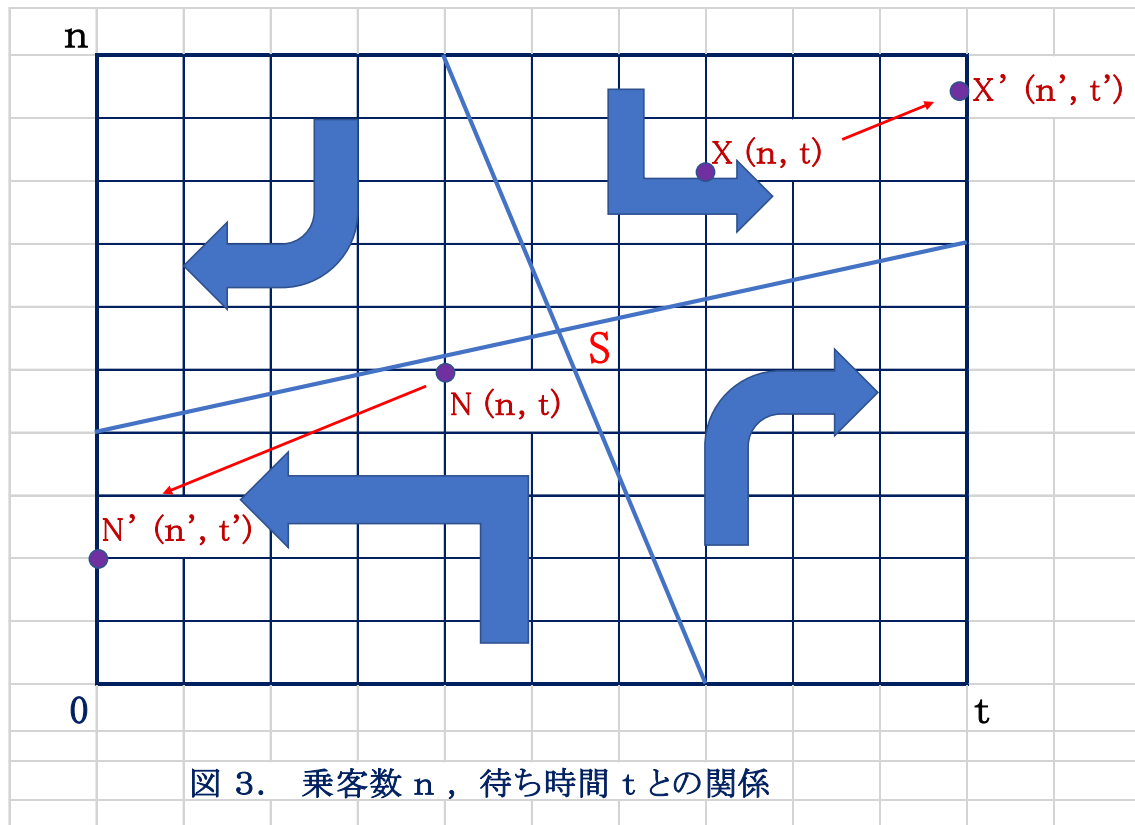
次の駅では乗客 n 人のうち $\beta * n$ 人が降り、ホームで待っていた $q * t$ 人の客が乗り込みます。したがって、新しい乗客数は $n - \beta * n + q * t$ となります。つまり、 $(1 - \beta) * n + q * t$ です。

ここで q は単位時間当たりの乗客の到着率で、 $q * t$ は前の電車が駅に着いてからこの電車が駅に着くまでに到着した乗客の数を表します。発車間隔 t' は、それまでの間隔 t から、前の電車の乗降客の乗り降りに必要な時間 c (前の電車は平常に運転しているものとして、これは定数として扱います。) を引いて、この電車の乗降に必要な時間 $d * (\beta * n + q * t)$ を加えたものになっています。ここでは、乗降に必要な時間は乗降客数に比例するものとしています。 c, d は定数とします。

$$n' = (1 - \beta) * n + q * t$$

$$t' = t + d * (\beta * n + q * t) - c \quad \sim \text{式 (1)}$$

パラメータの値を適当に決めて、式 (1) による (n, t) から (n', t') への動きを図示すると、図 3. のようになります。横軸が t で、縦軸が n です。この図の中央には不動点 S が 1つあって、そこを通る斜め右下がりの直線の上と下では、 (n, t) の動きが全く違ってきます。



この斜めの直線から右上の領域にある点、例えば点 X からスタートすると、線に沿っていずれ斜め右上の方向へ出ていってしまいます。これは電車の間隔が開き、乗客の数が大幅に増加することを示します。逆に左下の領域の点、例えば点 N のスタートだと、電車間隔は縮まり、乗客数も減ってきます。平常時の電車間隔と乗客数は、おそらく不動点近辺にあるはずです。不動点 S の少し左下では、放っておけば電車間隔はだんだん狭くなるのですが、そうはならないように各駅で少しずつ発車時刻を調整しています。

何かの原因で (n, t) がこの斜めの直線の右上に出てしまったときが問題です。放っておけば前の電車との間隔はどんどん開き、後続の電車との間隔が詰まってきます。すると後続の電車も遅れるのでその後との間隔も縮まります。このようになると、山手線を走っている電車はいくつかの団子状態運転になってしまいます。団子状態運転のとき、そのスピードは先頭の電

車のスピードで抑えられますから、単位時間に運べる乗客の数、という意味で、山手線全体のサービス能力が低下して、集まってくる乗客を捌ききれなくなります。こうなると駅のホームには人が溢れ返り、駅の外ではホームに入れない人が騒ぎだす、という最悪の事態になるわけです。

状況 4. 図 3. の X のような状態になったとき、事態をこれ以上悪化させないで平常状態に近づけるには、どのように対応策をとったら良いでしょうか。

考察 4. 図 3. から明らかなように、何とかして状態を斜線の左下の領域へ移動しなければなりません。それには n を下げるか、 t を小さくするかです。乗客に降りてもらうわけにはいきませんので n を下げるのは難しいのですが、 t は簡単に下げられます。

戦略：「前を走っている電車の発車を意図的に遅らせる。」

この戦略の効果は絶大で、電車に乗るときによく注意していると、JR山手線や中央線、東京メトロ等でもしばしばこの戦略を使っていることがわかります。この戦略とは別に、入場制限や他の私鉄や東京メトロなどへの振替輸送といった戦略もあります。この場合には、 n に手を付けるわけです。通常は、手配連絡に時間が必要で、費用も掛かるので、まずは上記の戦略「前を走っている電車の発車を意図的に遅らせる。」です。

なお、図 3. の不動点 S は、式(1)で $n' = n$, $t' = t$ とおいて解くことにより求められます。

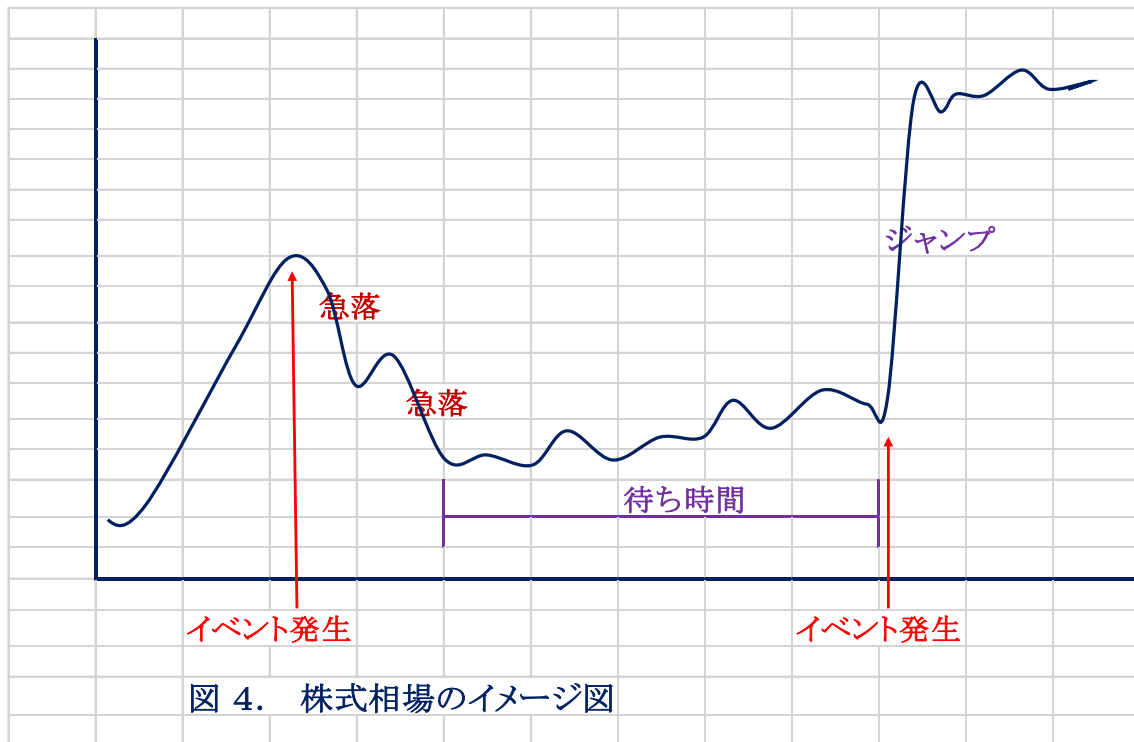
$$n = c / 2d\beta \quad t = c / 2dq \quad \sim \text{式 (2)}$$

電車の時刻表を考え決める際に、この不動点 S が経験的か理論的か分かっていると、電車の混雑は解消されるかもしれません。

さて、株式や為替の相場が急落してから穏やかな状態に移行したとしましょう。その穏やかな時期からジャンプ等のイベントが起こるまでの平均待ち時間はどうでしょうか。相場変動に関係したイベントは、ランダムに起こっています。

イベントがランダムに起こるということは、感覚的に思ったよりも長い時間 穏やかな時期を過ごさなくてはならなくなり、言い換えれば、リターンが十分大きくない時期を長く過ごさなくてはならなくなり、ジャンプが起こるイベントまでの待ち時間が長くなることを示唆しています。

しかしながら、「イベント」の定義が恣意的では困りますから、分析にあたっては最初に「イベント」の定義をしっかりとっておかなくてはなりません。「相場変化率が 5%以上」などと条件を設けなければなりません。



Ⅲ. エレベーターの団子状態運転

1. 団子状態運転

高層ビルのエレベーターの運行にも、以前は混雑と遅れの状態がよく見られました。何台かの（たとえば 10 台の）エレベーターが組になって、上下に行ったり来たりして、乗客を各階に運んでいるものとしましょう。

ここでは簡単のため、どのエレベーターも最下階（例えば 1 階）から最上階（例えば 30 階）まで上昇し、また最下階まで降りていくものとします。つまり途中で向きを変えて引き返すということはしないことにするのです。こうすると、各エレベーターは図 5. のように円運動をしていると考えることが

出来ます。

もし各エレベーターが追い越しをしないことにすると、このエレベーターの動きは JR山手線と同じです。 JR山手線も 30 駅ですから、30階のフロアであれば、停車するフロアも 30 で、JR山手線と同じです。 どんな配置から出発してもしばらくすると必ず団子状態運転になることは容易に想像できます。

実は、例え追い越しを認めたとしても、乗客の要求に全て反応しようとする、直に団子状態運転が始まってしまいます。 前のエレベーターとの間隔が空くと途中で待っている乗客が多くなり、電車と同様の理由でその間隔はどんどん開いていってしまうのです。 一昔前、エレベーターを自動運転しているデパ一では団子状態運転がよく見られました。

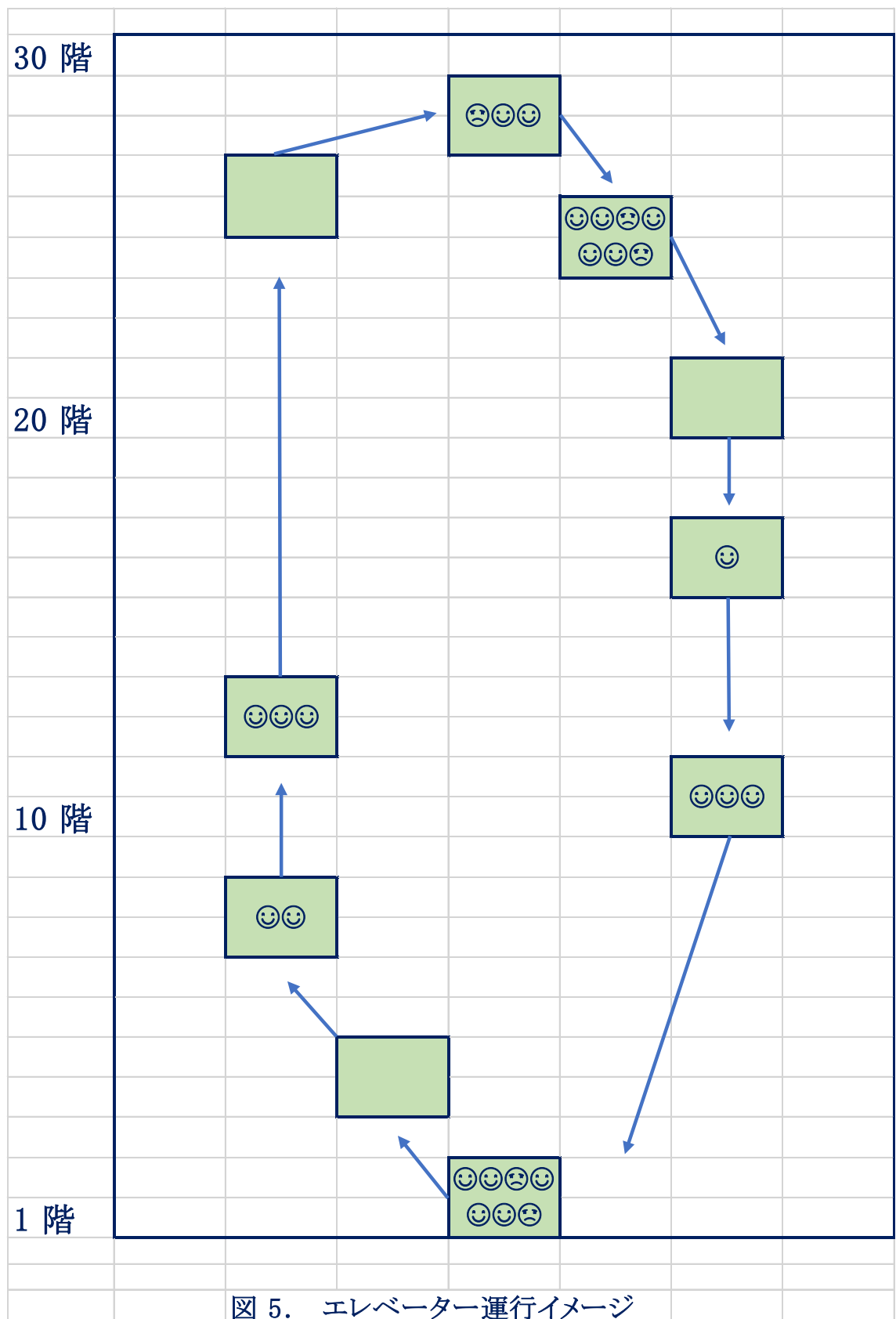


図 5. エレベーター運行イメージ

状況 5. エレベーターの団子状態運転を避けるにはどのような方策を取ったら良いでしょうか。

考察 5. 電車と比べて、エレベーターの場合には次のような特徴があります。まず、エレベーターでは、動いている状態から停まって扉を開閉して客を乗降させ、再びスタートするのにその運行時間の大部分を消費して、階の移動や通過にはほとんど時間が掛かりません。降りる乗客がいなければ途中の階を通過し追い越すことも可能です。エレベーターの定員が少ないことも特徴の一つです。

このように、エレベーターは個々の動きの自由度が大きいので、この自由度を最大限に利用すれば団子状態運転を避けて効率的に運用することが出来るはずです。余計なところには停まらず、目的階までなるべく早く到達することです。これにはある階で待っている乗客がいたら、その乗客を拾うエレベーターを決め、他のエレベーターはそこにはなるべく停まらないように運行プログラムを組むのです。つまり積極的に通過させるのです。

昔のエレベーターでは、待っている乗客にどのエレベーターが何階にいるのか はっきりと分かるようになっていました。ところが最近のエレベーターでは、エレベーターが到着する少し前にそのランプが点灯して乗客に予告するだけで、待っている乗客にはどのエレベーターが何階にいるのか一切分からないようになっていました。せっかく待っているのに目の前を通過されてしまった乗客を怒らせないための配慮です。

実際のエレベーターは大変複雑な管理プログラムによって制御されていて、団子状態運転が起きないように、さらには乗客の待ち時間が大きくなりないように工夫されています。

2. 混雑が増すと処理能力が落ちる現象

混み始めると処理能力が減少しどんどん混雑が激しくなる、という現象は、鉄道やエレベーターばかりではありません。道路でも多くの自動車が流入してくるとその処理能力が減少してしまうことがよく知られていますし、最先端の情報通信ネットワークの中でも通信回線のパンクなど、このような現象が起きています。

このような現象はなかなか複雑で、まだモデル化されておらず定量的な解析が出来ていないケースも多いのです。

世の中複雑ですが、待ち時間について本考察ノートでは観察される現象に沿った理由・原因を考えることが出来ました。

実際の株式相場や為替相場の変動などには、もっと複雑なモデルを考えなくてはなりません。

イベント発生待ち時間から相場変動を考えてみるのも、ある意味深い示唆を与えてくれるものと思います。

電車やエレベーターの運行は、株式相場や為替相場の変動とは違うという指摘をする方もいらっしゃるでしょう。もったなことです。

大抵の方が株式相場や為替相場はこの理論で動いていると一家言を持っていることと思います。

ただ、この考察ノートでは、「イベント」に焦点を当てて、イベントが起こるまでの待ち時間の観点から世の中の複雑な動きを考えるのも意味あることだと考え、ここに考察ノートとしてまとめた次第です。

そして、究極の目標の一つは、株式や為替の相場動向における「変化検知」技術の向上です。

「変化検知」については、またいつの日にか考察を深めたいと思います。

* 本考察ノートは、ポアソン分布、指数分布、待ち行列理論、オペレーションズ・リサーチなどに関する様々な書物、Webページなどを参考にさせてもらい、私自身の学習用にまとめたものになります。

したがって、新たなものを著作成したのではなく、あくまで学生の「おまとめノート」の類となります。
よって、新規性は全くありません。

簡単な自分用の学習参考書であるとお考え下さい。

(御参考)

1. 指数分布に基づいた考察

指数分布 (exponential distribution) は、連続確率分布の一種です。

これは例えばポアソン過程——事象が連続して独立に一定の発生率で起きる過程——に従う事象の時間間隔を記述します。

[定義]

指数分布は台 $(0, \infty)$ を持ち、母数 $\lambda > 0$ に対して確率密度関数が

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

で与えられます。このとき、累積分布関数は $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ で与えられます。

期待値・分散はそれぞれ $E(X) = 1/\lambda$, $V(X) = 1/\lambda^2$

無記憶性 : 指数分布は、幾何分布と同様に無記憶性 (memoryless) と呼ばれる性質を持つ。これは、確率変数 X が次の性質を持つことです。

$$\forall s, t > 0 \quad P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$

すなわち、時刻 s までに事象が生起しなかったという情報が与えられたとき、その事象がさらに t 時間の間生起しない条件付き確率は、(時刻 s まで事象が生起しなかったという情報が完全に忘れ去られ、改めてその時点から観測を始めて) t 時間の間事象が生起しない確率に一致するという意味です。

この性質を満たす連続確率分布が指数分布のみであることも証明されています。

指数分布の母平均 $\mu = \frac{1}{\lambda}$ の信頼区間 C.I. は、 n が大のとき精密法による必要はなく、

$$\bar{x} - Z_{\alpha} * \left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{n}} \right) \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha} * \left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{n}} \right)$$

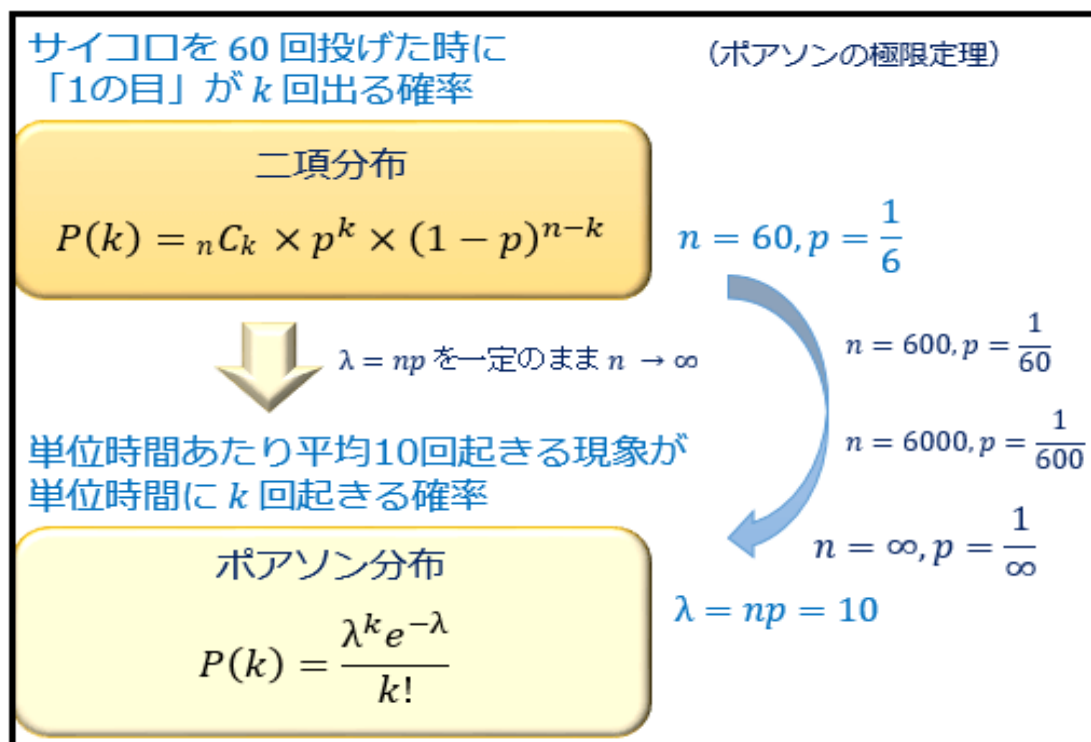
となります。

2. ポアソン分布に基づいた考察

ポアソン分布に基づき、統計的考察を行ないます。

試行回数： 多数回、大 発生件数： 極少

発生確率： 発生件数 / 試行回数



< ポアソン分布の推定・検定等分析 >

$Po(\lambda)$ 母集団における λ (母平均) の推定

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim Po(\lambda)$ X_i と X_j は独立 (n 個の標本)

n が大きい場合、「精密法」を採る必要はありません。

$$\bar{X} = \left(\frac{1}{n}\right) * (X_1 + X_2 + \dots + X_n) \text{ と置くと}$$

$$n\bar{X} = \text{Po}(n\lambda) \quad \because \text{ポアソン分布の再生性}$$

$$n\bar{X} \text{ の標準化} = \frac{(n\bar{X} - n\lambda)}{\sqrt{n\lambda}} \sim N(0, 1)$$

$\because$ 中心極限定理

$$1 - \varepsilon = P\left(\left|\frac{(n\bar{X} - n\lambda)}{\sqrt{n\lambda}}\right| \leq Z_{\alpha}\right)$$

$$= P(|N(0, 1)| \leq Z_{\alpha})$$

信頼度 $(1 - \varepsilon)$ で母平均 λ の信頼区間 C.I. は、以下の式になります。

$$\bar{x} - Z_{\alpha} * \left(\sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}\right) \leq \lambda \leq \bar{x} + Z_{\alpha} * \left(\sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}\right)$$

$$Z = \frac{(n\bar{X} - n\lambda)}{\sqrt{n\lambda}}$$

ポアソン分布と指数分布は関連あるので、信頼区間の式も良く似ています。

以上