

Ⅱ-3. 上野戦争とアームストロング砲

～ 上野戦争におけるアームストロング砲の 命中精度をポアソン分布から考える ～

2025 年 1 月 19 日

M. Fujii

司馬遼太郎の小説に『花神』（新潮文庫）や『アームストロング砲』（講談社文庫）がありますが、関連する上野戦争の話です。

慶応 4 年 5 月 15 日（1868 年 7 月 4 日）、士族で構成された彰義隊ら旧幕府軍と司令官の大村益次郎が指揮する新政府軍が上野で対峙し交戦しました。ちなみに、西郷隆盛・勝海舟の会談による江戸城無血開城は、上野戦争の約 1 か月前の 4 月 11 日です。彰義隊と新政府軍が戦い合えば、江戸が火の海に

なる恐れがあると、多くの人が噂していました。5月15日朝7時に始まった戦いは、結局1日で終結しました。彰義隊の残党兵は、夕刻5時には大村益次郎が用意していた一つの出口より根岸方面に逃げました。

開戦時の戦力は、彰義隊側が約1,000名、新政府軍が約10,000名でした。戦死者は、彰義隊側が約250名、新政府軍は30名あまりとされています。

司馬遼太郎の小説『花神』では、午前中一進一退の戦況が午後に入り、新政府軍によるアームストロング砲の砲撃開始を切っ掛けに大きく変化し、新政府軍は10時間余りの戦闘で勝利したことが描かれています。

さて、ここで砲弾の命中割合と命中精度について、考察してみよう。

<事例Ⅰ>

「上野戦争で、アームストロング砲などが上野寛永寺を攻撃したとき、450発が命中したとしましょう。上野寛永寺の領域を約50ha（50ヘクタール；つまり500,000平方メートル）とし、等

面積の 500 に分割して考えるとき、分割された小区分地域（つまり 1 小区分地域の面積は 1,000 平方メートル）で 1 発も命中していない小区分地域の数は、いくらと見込まれますか。」

＊ 幕末・明治初期の上野寛永寺は、現在の上野恩賜公園に当たります。

上野恩賜公園の面積は 53ha（53 ヘクタール；1ha は 100m 四方の正方形の面積なので、53 万平方メートル）です。



類題として、年末のスポーツバラエティーTV 特番でよく行われる一流野球選手やサッカー選手等による“ストラック・アウト・的抜きゲーム”を考えてみましょう。

“ストラック・アウト・的抜きゲーム”は、一流野球選手やサッカー選手が野球ボール 10 球を投げたり、サッカーボールを 10 回蹴ることで、「3×3 のマス」のひとつひとつの小さなマスを後方に飛ばし、何枚小さいマスを抜いたか競うゲームです。25 回投げたり蹴ったりすることで、「5×5 のマス」にしてゲームレベルを上げることもあります。

<事例Ⅱ>

「ストラック・アウト・的抜きゲーム：一流野球選手やサッカー選手が野球ボール 25 球を投げたり、サッカーボールを 25 回蹴ることで、「5×5 のマス」のひとつひとつの小さいマスを後方に飛ばし、何枚小さいマスを抜いたか競うゲームが行なわれました。さすがに、一流選手なので、大枠の外側にボールを外してしまうことはなく、25 球すべて「5×5 のマス」内に命中しました。

「5*5 のマス」の領域全体を等面積の 25 に分割したとき、分割された 25 小区分マスで 1 発も命中していない小区分マスの数は、いくらと見込まれますか。」

	①	②	③	④	⑤	
	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	
	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮	
	⑯	⑰	⑱	⑲	⑳	
	㉑	㉒	㉓	㉔	㉕	
				(作成: M.Fujii)		

図2. ストラック・アウト・的抜きゲーム

Note

0. ポアソン分布

ポアソン分布（Poisson distribution）とは、ある事象が一定の時間内に発生する回数を表す離散確率分布です。

$$P(K) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \text{--- (式 1)}$$

定数 $\lambda > 0$ に対し、0 以上の整数を値にとる確率変数 K が上記式を満たすとき、確率変数 K は母数 λ のポアソン分布に従うと言います。

ここで、 e はネイピア数（ $e = 2.71828\cdots$ ）であり、 $k!$ は k の階乗を表します。また、 λ は所与の区間内で発生する事象の期待発生回数に等しいです。

$P(K)$ は、「所与の時間中に平均で λ 回発生する事象がちょうど k 回 (k は非負の整数) 発生する確率」に相当します。

1. 事例Ⅰの考察

上野寛永寺の領域へのアームストロング砲などの砲弾の命中数は、450 発です。命中数の平均は $450/500$ で、平均 0.9 です。

平均 $\lambda = 0.9$ としましょう。

ここで、確率変数 X_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 500$) を下記のように定義します。

$X_i = 0$ (小区分地域 i に命中した場合)

$X_i = 1$ (小区分地域 i に命中しなかった場合)

このとき、 X_i の期待値は、

$0 * P$ (小区分地域 i に命中した場合)

$+ 1 * P$ (小区分地域 i に命中しなかった場合)

$$= e^{-0.9} \doteq 0.40657$$

命中していない「小区分地域数」の総数を T とすると、

$$E(T) = E\left\{\sum_{i=1}^{500} X_i\right\} = \sum_{i=1}^{500} E(X_i)$$

$$= 500 * 0.40657 = 203.29$$

と計算されます。

上野寛永寺の分割された 500 の小区分地域で、アームストロング砲等の砲弾が 1 発も命中していない数は、203 です。

⇒ 450 発の砲弾のうち、203 小区分地域で当たっていないことをどう考えますか。

→ 上野寛永寺の領域全体では、ほぼ 9 割 ($450/500 = 0.9$)

命中したように見えるのに、500 の小区分地域に分けると、

命中精度は約 6 割 ($1 - 203/500$) です。

バラツキがあります。平均的に当たっていないこのような

状況は一般的と言えましょう。

同じ小区分地域に複数の砲弾が当たったと言えます。

しかし、4 割の小区分地域にあたっていないのです。

2. 事例Ⅱの考察

「5*5 のマス」の領域への一流選手のボール命中数は、25 発撃って、25 発です。命中数の平均は $25/25$ で、平均 1.0 です。

平均 $\lambda = 1.0$ としましょう。

ここで、確率変数 Y_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 25$) を下記のように定義します。

$Y_i = 0$ (小区分マス i に命中した場合)

$Y_i = 1$ (小区分マス i に命中しなかった場合)

このとき、 X_i の期待値は、

$0 * P$ (小区分マス i に命中した場合)

$+ 1 * P$ (小区分マス i に命中しなかった場合)

$= e^{-1.0} \doteq 0.36788$

命中していない「小区分マス」の総数を N とすると、

$$E(N) = E\{ \sum_{i=1}^{25} Y_i \} = \sum_{i=1}^{25} E(Y_i)$$

$$= 25 * 0.36788 = 9.197$$

と計算されます。

「5*5 のマス」の領域を 25 マスの等面積に分割したとき、25 小区分マスで 1 発も命中していない数は、9.197 です。

⇒ 「5*5 のマス」の領域を等面積の 25 に分割したとき、1 発も命中していない小区分マスの数は、9.197 と 3 割 7 分近く当たっていないことをどう考えますか。

→ マス全体では、100 発 100 中であるのに、小区分マスに

分けると、命中精度（命中濃度）にバラツキがあります。

平均的に当たっていないのです。

年末のスポーツバラエティーTV特番でよく行われる一流野球選手やサッカー選手等による“ストラック・アウト・的抜きゲーム”を観るとき、「一流選手なのに、(小区分) マスを外しているなあ。スポーツオフ・シーズンで体調悪いのか、ゲーム感覚が下がっているからかなあ。」と適当な感想を述べている人がいます。

しかしながら、均一に小区分マスに当たることは稀で、上記のように一流選手でも半分を少し超えた成績にしかないことはしばしばあります。

25枚の小区分マスのうち15枚当てるだけでも凄いと考えるといけないのです。

実際の株式相場や為替相場の変動では、もっと複雑なモデルを考えなくてはなりません。

イベント発生の待ち時間から相場変動を考えてみると、平均的にバラツキがなく、濃淡がない安定的なことは稀でした。

世の中の事象が平均的で均一なことは極めて稀で、かなり濃淡があり、不平等であることが多いと言えるように思います。

不平等であり濃淡がある世の中を前提にすると、投資運用技術の究極のプロセス目標の一つは、株式や為替の相場動向における濃淡の変化点、均一な点だと思っていたものが濃淡ある不均一なものに変化する点を探索するための「変化検知」技術の向上になります。

今後、この「変化検知」について、考察を深めたいと思います。

(御参考)

1. 指数分布に基づいた考察

指数分布 (exponential distribution) は、連続確率分布の一種です。

これは例えばポアソン過程——事象が連続して独立に一定の発生率で起きる過程——に従う事象の時間間隔を記述します。

[定義]

指数分布は台 $(0, \infty)$ を持ち、母数 $\lambda > 0$ に対して確率密度関数が

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

で与えられます。このとき、累積分布関数は $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ で与えられます。

期待値・分散はそれぞれ $E(X) = 1/\lambda$, $V(X) = 1/\lambda^2$

無記憶性 : 指数分布は、幾何分布と同様に無記憶性 (memoryless) と呼ばれる性質を持つ。これは、確率変数 X が次の性質を持つことです。

$$\forall s, t > 0 \quad P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$

すなわち、時刻 s までに事象が生起しなかったという情報が与えられたとき、その事象がさらに t 時間の間生起しない条件付き確率は、(時刻 s まで事象が生起しなかったという情報が完全に忘れ去られ、改めてその時点から観測を始めて) t 時間の間事象が生起しない確率に一致するという意味です。

この性質を満たす連続確率分布が指数分布のみであることも証明されています。

指数分布の母平均 $\mu = \frac{1}{\lambda}$ の信頼区間 C.I. は、 n が大のとき精密法による必要はなく、

$$\bar{x} - Z_{\alpha} * \left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{n}} \right) \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha} * \left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{n}} \right)$$

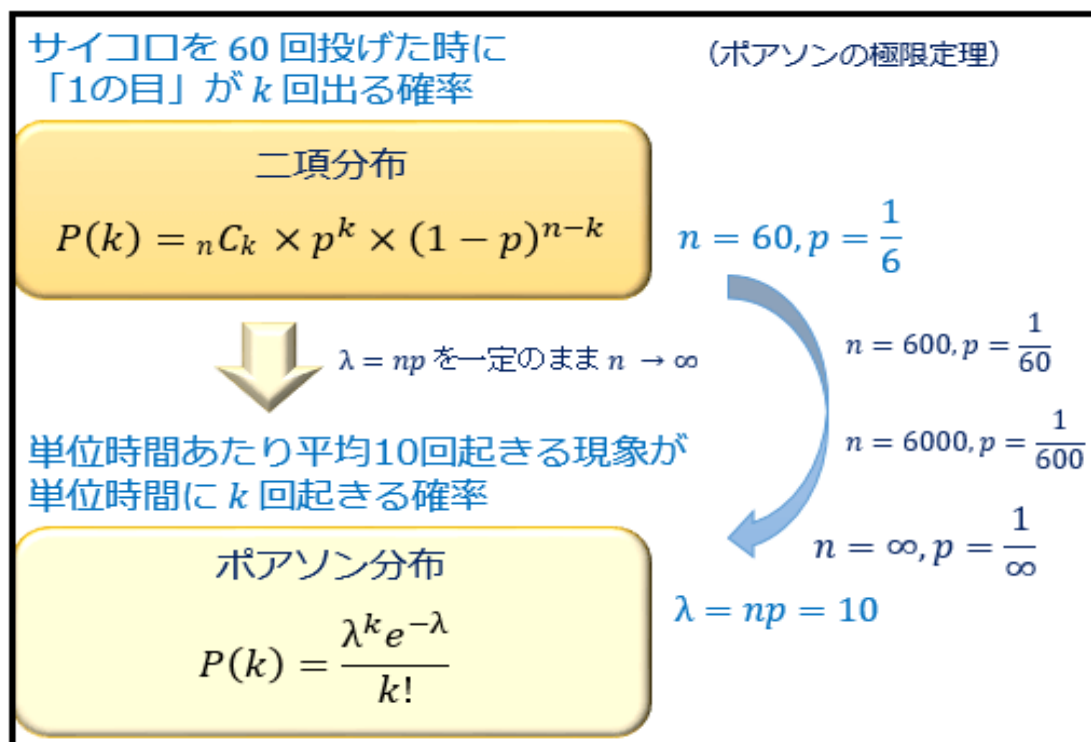
となります。

2. ポアソン分布に基づいた考察

ポアソン分布に基づき、統計的考察を行ないます。

試行回数： 多数回、大 発生件数： 極少

発生確率： 発生件数 / 試行回数



< ポアソン分布の推定・検定等分析 >

$Po(\lambda)$ 母集団における λ (母平均) の推定

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim Po(\lambda)$ X_i と X_j は独立 (n 個の標本)

n が大きい場合、「精密法」を採る必要はありません。

$$\bar{X} = \left(\frac{1}{n}\right) * (X_1 + X_2 + \dots + X_n) \text{ と置くと}$$

$$n\bar{X} = \text{Po}(n\lambda) \quad \because \text{ポアソン分布の再生性}$$

$$n\bar{X} \text{ の標準化} = \frac{(n\bar{X} - n\lambda)}{\sqrt{n\lambda}} \sim N(0, 1)$$

$\because$ 中心極限定理

$$1 - \varepsilon = P\left(\left|\frac{(n\bar{X} - n\lambda)}{\sqrt{n\lambda}}\right| \leq Z_{\alpha}\right)$$

$$= P(|N(0, 1)| \leq Z_{\alpha})$$

信頼度 $(1 - \varepsilon)$ で母平均 λ の信頼区間 C.I. は、以下の式になります。

$$\bar{x} - Z_{\alpha} * \left(\sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}\right) \leq \lambda \leq \bar{x} + Z_{\alpha} * \left(\sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}\right)$$

$$Z = \frac{(n\bar{X} - n\lambda)}{\sqrt{n\lambda}}$$

ポアソン分布と指数分布は関連あるので、信頼区間の式も良く似ています。

* 本考察ノートは、ポアソン分布、指数分布、待ち行列理論、オペレーションズ・リサーチなどに関する様々な書物、Webページなどを参考にさせてもらい、私自身の学習用にまとめたものになります。したがって、新たなものを著作成したのではなく、あくまで学生の「おまとめノート」の類となります。よって、新規性は全くありません。簡単な自分用の学習参考書であるとお考え下さい。

以上