

< ご参考 >

相対的リスク回避度（ RRA ） の計測方法

相対的リスク回避度に関する先行研究として、Friend and Blume (1975) がある。

そこでは、金融資産額や年収、あるいは金融資産額に対して相対的リスク回避度は変化するどうか危険資産比率から求められた。

Friend and Blume (1975) において、相対的リスク回避度(RRA)は以下の式から求められるものと定義している。

$$\text{相対的リスク回避度 } RRA_i \equiv \left\{ \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m^2} \right\} * \left(\frac{1}{\alpha_i} \right) \quad (\text{補式-1})$$

R_m : 危険資産の収益率 R_f : リスク・フリー・レート

σ_m : 危険資産リスク α_i : アロケーション比率

この 補式-1 は、投資家の相対的リスク回避度は、リスク資産の超過収益率（＝ 危険資産の収益率 － リスク・フリー・レート）の期待値を危険資産リスクの2乗で割り戻した「リスクの市場価値」に「危険資産への投資比率の逆数」を乗じたものであることを示している。

危険資産のリスク 1 単位当りで測定した危険資産の期待超過期待収益率が上昇したときには、資産運用者の相対的リスク回避度が不変であれば、資産運用者は危険資産比率を上昇させることになる。

逆に、危険資産のリスク 1 単位当りで測定した危険資産の期待超過期待収益率が上昇したときには、危険資産比率が不変であるとする、資産運用者は相対的リスク回避度を上昇させたと解釈できる。

資産運用者の相対的リスク回避度は、資産運用者のリスク・リターン特性から一意に決定され、資産運用者に固有であり、かつ時系列に変化するものである。

この相対的リスク回避度は、資産運用者の金融資産額規模、投資経験、投資スタンスなどによって決まり、また市場環境や投資性商品の規制緩和や新商品の開発、などの影響により、時系列的にも変化する。

こうした特徴を持つ相対的リスク回避度を推計することにより、資産運用者に適した投資性の商品を販売することが出来る。

また、こうした相対的リスク回避度の活用により、適合性の原則に則った投資性商品の販売を行なっているかどうかを定量的に判断することが可能になる。

相対的リスク回避度では、初期の資産額 W を保有する資産運用者を考える。

この資産運用者の資産額の水準に対する選好は基礎的効用関数 $u(\cdot)$ に
より表され、この効用関数は狭義準凹の増加関数で 2 回連続微分可能であると仮
定する。

ここで、平均的に期待される収益はゼロであるが、手数料等がかからない資産
運用対象商品が存在し、この資産運用対象商品に投資するかどうかを考える。

この資産運用による利益額を確率変数で $\tilde{\epsilon}$ 円、資産運用を行なった場合の
富の水準を $\tilde{x}$ とすると、以下のとおり表される。

$$\tilde{x} = W + \tilde{\epsilon} \quad E(\tilde{x}) = W \quad E(\tilde{\epsilon}) = 0 \quad (\text{補式-2})$$

ここで、資産運用を行なった場合の資産額の水準 $\tilde{x}$ の確実性等価 x^u は、
リスク・プレミアムを Π とすると、 $x^u = W - \Pi$ であることから、リスク・プレミ
ム Π の資産額の絶対水準 W に対する比率 $\hat{\Pi}$ は次のように表される。

$$\hat{\Pi} = \frac{W - x^u}{W} \Leftrightarrow x^u = W (1 - \hat{\Pi}) \quad (\text{補式-3})$$

また、資産運用を行なった場合の資産額の水準を投資しない場合の資産額の
水準で除した比率（資産額の収益率） $\tilde{R}$ は

$$\tilde{R} = \frac{W + \tilde{\epsilon}}{W} \Leftrightarrow W + \tilde{\epsilon} = W \tilde{R} = W + W(\tilde{R} - 1) \quad (\text{補式-4})$$

と表されるので、確実性等価の定義式 $u(x^u) = E(u(W + \tilde{\epsilon}))$ の両辺に
代入すると、次のようになる。

$$u(W - W\hat{\Pi}) = E[u(W + W(\tilde{R} - 1))] \quad (\text{補式-5})$$

また、 $\tilde{R} = 1 + (\frac{\tilde{\varepsilon}}{W})$ であることから

$$E(\tilde{R}) = 1, \quad E(\tilde{R} - 1)^2 = \text{Var}(\tilde{R})$$

であることから、両辺をそれぞれ W の周りでテイラー展開し、第2項までの近似を使い代入し整理すると、以下のようになる。

$$-u'(W)(W\hat{\Pi}) \cong \frac{u''(W)}{2} W^2 \text{Var}(\tilde{R}) \quad (\text{補式-6})$$

したがって、資産額に対する比率によって、リスク・プレミアムを定義した場合、相対的リスク回避度 RRA は次のとおり定義される。

$$RRA \equiv -\frac{u''(W)}{u'(W)} W \quad (\text{補式-7})$$

この式 (A7) に期待効用の2次微分の定義式 $u''(W) = d u'(W) / dW$ を代入すると、以下のように表現できることから、相対的リスク回避度 RRA は、限界効用の富に対する弾力性と解釈することが出来る。

$$RRA \equiv -\left(\frac{du'(W)}{u'(W)} \right) \left(\frac{W}{dW} \right) \quad (\text{補式-8})$$

相対的リスク回避度の計測では、上記弾力性の式 (A8) を用いて、Friend and Blume (1975) は、以下の方法により、危険資産比率をもとに資産運用者の相対的リスク回避度が推計できるとしている。

R_m : 危険資産の収益率 R_f : リスク・フリー・レート

σ_m : 危険資産リスク α_i : アロケーション比率

$y(t)$: 標準正規分布する乱数

i 番目の資産運用者の資産額 W_{it} の恒等式は、税がないことを前提に、次のように表される。

$$W_{i,t+dt} = W_{it} \{ 1 + [R_f + \alpha_i (E(R_m) - R_f)] dt + \alpha_i \sigma_m y(t) \sqrt{dt} \} \quad (\text{補式-9})$$

W_{it} に関する効用関数 $u(W_{it})$ を考え、 $u(W_{it})$ を W_{it} の近傍でテイラー展開して期待値をとり、2 次までの項を残し、 dt の 2 乗以上の項を無視して展開し、ここで、危険資産比率 α_i について偏微分し、 $E(u) = 0$ とおくと

$$u'(W_{it})(E(R_m) - R_f) + u''(W_{it}) W_{it} \alpha_i \sigma_m^2 = 0 \quad (\text{補式-10})$$

また、相対的リスク回避度 RRA の定義式は $RRA_i \equiv -\frac{u''(W_{it})}{u'(W_{it})} W_{it}$

であることから、危険資産比率 α_i は

$$\alpha_i \equiv \left\{ \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m^2} \right\} * \left(\frac{1}{RRA_i} \right) \quad (\text{補式-11})$$

よって、相対的リスク回避度 RRA は以下のように定義できる。

$$RRA_i \equiv \left\{ \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m^2} \right\} * \left(\frac{1}{\alpha_i} \right) \quad (\text{補式-12})$$

市場のリスクに対する超過収益率が大いほど、相対的リスク回避度は大きくなる。

危険資産比率が高いほど、相対的リスク回避度は小さくなる。

これは、資産運用者の相対的リスク回避度が小さくなれば、危険資産への資産運用額が増加するという一般的な考え方と整合的である。

以上